1) ΝΔΟ η κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του Π.Ο της. Έπειτα, να εξετάσετε ποιες από αυτές είναι συνεχώς παραγωγίσιμες.

α. $f(x,y) = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$ β. $f(x,y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$

γ. $f(x,y) = \dfrac{x \cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ δ. $f(x,y) = \dfrac{x^2 \cdot y}{x^4+y^2}$

<u>ΛΥΣΗ</u>

α. $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(2xy)'(x^2+y^2)^2 - ((x^2+y^2)^2)' \cdot 2xy}{[(x^2+y^2)^2]^2} =$$

$$= \frac{2y \cdot (x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2) \cdot 2x \cdot 2xy}{(x^2+y^2)^4} =$$

$$= \frac{2y \cdot (x^2+y^2)^2 - 8(x^2+y^2) \cdot x^2 \cdot y}{(x^2+y^2)^4} =$$

$$= \frac{\cancel{(x^2+y^2)}(2y(x^2+y^2) - 8x^2 \cdot y)}{(x^2+y^2)^{\cancel{4}}} =$$

$$= \frac{2yx^2 + 2y^3 - 8x^2 \cdot y}{(x^2+y^2)^3} = \frac{2y^3 - 6x^2 \cdot y}{(x^2+y^2)^3}, \ \forall (x,y) \neq (0,0)$$

όμοια,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x \cdot y^2 + 2x^3 - 8y^2 x}{(x^2+y^2)^3}, \ \forall (x,y) \neq (0,0)$$

f διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

f συνεχώς διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ διότι οι $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$

β. $f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad \left(= \frac{x^2+y^2}{x \cdot y}\right)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2 \cdot y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x} = \frac{y^2-x^2}{y^2 \cdot x}$$

f διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

οι $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ συνεχείς

δηλ. f συνεχώς διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

γ.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - x \cdot y \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x\sqrt{x^2+y^2} - x \cdot y \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0)$$

διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ και προφανώς συνεχώς διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

δ. $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x \cdot y \cdot (x^4+y^2) - x^2 \cdot y \cdot 4x^3}{x^4+y^2} =$$

$$= \frac{2x^5 y + 2xy^3 - 4x^5 \cdot y}{x^4+y^2} = \frac{2xy^3 - 2x^5 y}{x^4+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2 \cdot (x^4+y^2) - x^2 \cdot y \cdot 2y}{x^4+y^2} =$$

$$= \frac{x^6 + x^2 \cdot y^2 - 2x^2 \cdot y^2}{x^4+y^2} = \frac{x^6 - x^2 \cdot y^2}{x^4+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0)$$

ομοια βλεπουμε οτι η f διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
και συνεχώς διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

2) Για τις συναρτήσεις της ασκησης (1) → (για τα (α), (γ) και (δ))
να εξετασετε ως προς τη μερική διαφορισιμότητα
καθώς και την (ολική) διαφορισιμότητα στο $(x,y)=(0,0)$

<u>ΛΥΣΗ</u>. (οι συναρτησεις θα πρέπει να εχουν 2ο κλαδο το μηδεν για $(x,y)=(0,0)$)

α. <u>Μερική διαφορισιμότητα:</u>

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla f(0,0) = (0,0)$$

<u>(ολική) διαφορισιμότητα</u>

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)(x-0,y-0)}{\|x-y\|}$$

Αρκεί να δουμε εαν $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x\cdot y}{(x^2+y^2)^2} \quad ??$$

Επιλεγουμε την ακολουθία:

$$\left(\frac{1}{\nu},\frac{1}{\nu}\right)\to 0 \quad \text{αλλά} \quad \lim \frac{2\cdot 1/\nu^2}{(2/\nu^2)^2} = \lim \frac{\cancel{2\frac{1}{\nu^2}}}{\cancel{2\frac{1}{\nu^2}}\cdot\frac{1}{\nu^2}} = \infty$$

άρα $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x\cdot y}{(x^2+y^2)^2}$ άρα f οχι διαφορίσιμη

στο σημείο $(0,0)$

γ. Μερική διαφορισιμότητα:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0$$

→ Μερικώς διαφορ. στο (0,0)

(ολική) διαφορισιμότητα:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)(x-0,y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ όμως δεν υπάρχει και αποδεικνύεται εύκολα επιλέγοντας $\left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right)$

άρα, όχι (ολικά) διαφορίσιμη.

δ. Μερική διαφορισιμότητα

όμοια!

(ολική) διαφορισιμότητα

αλλά $\Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \cdot y}{x^4+y^2}$ ⇐ Απ' το παραπάνω δεδομένο.

α) $f(x,y,z) = x\cdot \exp(-x^2-y^2-z^2)$ οπου $\exp u = e^u$

β) $f(x,y,z) = \dfrac{x\cdot y\cdot z}{x^2+y^2+z^2}$, γ) $f(x,y,z) = z^2\cdot e^x\cdot \cos y$

ΛΥΣΗ

Η κλίση είναι η $\nabla f(x) = grad\, f(x) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x^{(1)}}(\bar{x}_0), \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x^{(n)}}(\bar{x}_0)\right)$

α) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \exp(-x^2-y^2-z^2) + x\cdot \exp(-x^2-y^2-z^2)\cdot(-2x) =$

$= \exp(-x^2-y^2-z^2) - 2x^2\cdot \exp(-x^2-y^2-z^2) =$

$= \exp(-x^2-y^2-z^2)(1-2x^2)$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \exp(-x^2-y^2-z^2)\cdot(-2y) =$

$= -2y\cdot \exp(-x^2-y^2-z^2)$

$\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -2z\,\exp(-x^2-y^2-z^2)$

β) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{y\cdot z\cdot(x^2+y^2+z^2) - 2x\cdot xyz}{(x^2+y^2+z^2)^2} =$

$= \dfrac{x^2 yz + y^3 z + z^3 y - 2x^2 yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} =$

$= \dfrac{y^3 z + z^3 y - x^2 yz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$.

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \dfrac{x\cdot z(x^2+y^2+z^2) - 2y\,xyz}{(x^2+y^2+z^2)^2} =$

$= \dfrac{x^3 z + z^3 x - y^2 xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$.

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{xy(x^2+y^2+z^2) - 2z \cdot xyz}{(x^2+y^2+z^2)^2} =$$

$$= \frac{x^3y + x \cdot y^3 - z^2 x \cdot y}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

γ) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = z^2 \cdot e^x \cdot \cos y.$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = z^2 e^x (-\sin y) = -z^2 e^x \sin y.$

$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z \cdot e^x \cdot \cos y.$

4. Να βρεθεί ο πίνακας μερικών παραγώγων των συναρτήσεων:

α) $f(x,y) = (x,y)$ για $f: R^2 \to R^2$

β) $f(x,y) = (e^{x+y} + y, y^2 x)$ για $f: R^2 \to R^2$

γ) $f(x,y,z) = (ze^x, -ye^z)$ για $f: R^3 \to R^2$

δ) $f(x,y) = (x \cdot e^y + \cos y, x, x + e^y)$ για $f: R^2 \to R^3$

ε) $f(x,y,z) = (xze^{xy}, z \cdot \sin y, 5xy^2)$ για $f: R^3 \to R^3$

ΛΥΣΗ

Γενικά, $Df(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$

πχ. (α) $f(x,y) = \begin{cases} x \\ y \end{cases}$

$f_1(x,y) = x$ και
$f_2(x,y) = y$

α) $Df(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

β) $$Df(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{x+y} & e^{x+y}+1 \\ y^2 & 2yx \end{bmatrix}$$

όπου,

$$f_1(x,y) = e^{x+y} + y \quad \text{και} \quad f_2(x,y) = y^2 \cdot x$$

γ) ομοια εχουμε

$$Df(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \end{bmatrix}$$

όπου,

$$f_1(x,y,z) = z \cdot e^{-x} \quad \text{και} \quad f_2(x,y,z) = -y e^{z}$$

άρα, $$Df(x,y,z) = \begin{bmatrix} e^{x} \cdot z & 0 & e^{x} \\ 0 & -e^{z} & -y e^{x} \end{bmatrix}$$

δ). $$Df(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{y} & xe^{y} - \sin y \\ 1 & 0 \\ 1 & e^{y} \end{bmatrix}$$

όπου,

$$f_1(x,y) = x \cdot e^{y} + \cos y, \quad f_2(x,y) = x, \quad f_3(x,y) = x + e^{y}$$

ε) $$Df(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{xy}(1+xy), & x^2 z e^{xy}, & x \cdot e^{xy} \\ 0, & z \cdot \cos y, & \sin y \\ 5y^2 & 10xy & 0 \end{bmatrix}$$

όπου,

$$f_1(x,y,z) = x \cdot z e^{xy}, \quad f_2(x,y,z) = z \cdot \sin y, \quad f_3(x,y,z) = 5xy^2$$

5) Να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ για τη συνάρτηση και τα σημεία που δίνονται

α) $z = \log\sqrt{1+xy}$ στο $(x_0, y_0) = (0,0)$ β) $z = e^{ax}\cdot\cos(bx+y)$ και στο $(a/2, a/2)$

ΛΥΣΗ

α) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1+xy}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{1+xy}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+xy}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+xy}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(1+xy) =$$

$$= \frac{1}{2(1+xy)}\cdot y = \frac{y}{2(1+xy)}$$

όμοια,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{2(1+xy)}$$

στο $(0,0)$ είναι $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{0}{2(1+0\cdot 0)} = 0$

και $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

β) $$\frac{\partial z}{\partial x} = (e^{ax}\cdot a)\cdot\cos(bx+y) - \sin(bx+y)\cdot b\cdot e^{ax} =$$

$$= a\cdot e^{ax}\cdot\cos(bx+y) - \sin(bx+y)\cdot b e^{ax} =$$

$$= e^{ax}\left(a\cdot\cos(bx+y) - b\sin(bx+y)\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{ax}\cdot(-\sin(bx+y)) = -e^{ax}\cdot\sin(bx+y)$$

στο $(a/2, a/2)$ είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a/2, a/2) = e\left(a\cdot\cos\left(\frac{ba}{2}+\frac{a}{2}\right) - b\sin\left(\frac{ba}{2}+\frac{a}{2}\right)\right) =$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a/2, a/2) = -e\sin\left(\frac{ba}{2}+\frac{a}{2}\right)$$